

FÍSICA (Informática de Gestión)
Septiembre de 2005
Soluciones (Original)

PROBLEMA 2.1.1

Tenemos una batería V_o unida a un sistema de condensadores dispuesto como indica la figura P2.1.1. Inicialmente el interruptor S está abierto. En un instante dado se cierra el interruptor. Calcular la carga en los condensadores así como la carga total almacenada por el sistema antes y después de cerrar el interruptor.

$$C = 1 \mu\text{F}. C_1 = 1 \mu\text{F}. C_2 = 0,5 \mu\text{F}. V_o = 10 \text{ V}.$$

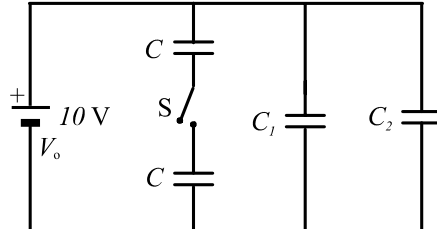


Figura P2.1.1

Solución

1) Interruptor S abierto

En este caso la tensión de 10 voltios sólo se aplica a los condensadores C_1 y C_2 . Como están en paralelo se aplica la misma tensión a los dos.

$$Q_1 = C_1 V_o = 10^{-6} \times 10 = 10^{-5} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 V_o = 0,5 \times 10^{-6} \times 10 = 5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

La carga total será,

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 15 \times 10^{-6} \text{ C}$$

2) Interruptor S cerrado

La carga de los condensadores C_1 y C_2 no varía, pues siguen conectados de la misma forma a la pila.

Ahora los condensadores C están conectados en serie y unidos a la pila de 10 voltios, por tanto tienen la misma carga Q . Como $C = Q/V$,

$$V_o = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} = 2\frac{Q}{C} = 10 \rightarrow Q = 5C = 5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

La carga total será,

$$Q'_T = Q_1 + Q_2 + Q = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$$

PROBLEMA 2.1.2

En la figura P2.1.2 se muestra un conductor con tramos rectos y circulares por el que circula una corriente I . Calcular el campo magnético creado en el origen de coordenadas.

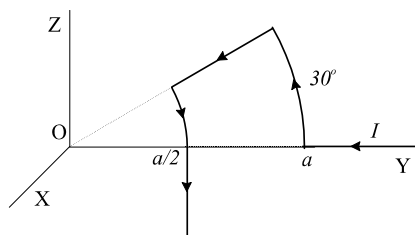


Figura P2.1.2

Solución

Calculamos el campo aplicando la ley de Biot y Savart por tramos.

1) Tramo recto sobre el eje Y

El campo es nulo por que $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \parallel d\mathbf{l}' \rightarrow d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$

$$\mathbf{B}_1 = 0$$

2) Tramos circular de radio a y ángulo $\pi/6$

Para calcular el campo magnético en O utilizamos la ley de Biot y Savart como se hace en ejemplo 6.2, página 222 del libro de Física para informática (V. López y M. M. Montoya).

En nuestro caso la circunferencia está en el plano YZ, por tanto la coordenada z se cambia por x , siendo $x = 0$. Por otra parte aquí $R = a$, en consecuencia,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{\pi/6} \frac{Ia^2 d\varphi}{a^3} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{a} \frac{\pi}{6} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o}{24} \frac{I}{a} \mathbf{u}_x$$

3) Tramo recto que forma un ángulo $\pi/6$ con el eje Y

El campo es nulo por que $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \parallel d\mathbf{l}' \rightarrow d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$

$$\mathbf{B}_3 = 0$$

4) Tramos circular de radio $a/2$ y ángulo $\pi/6$

Procedemos de forma análoga al caso 2). Ahora $R = a/2$ y el sentido de la corriente es contrario, por tanto el campo tiene sentido en la dirección de $-\mathbf{u}_x$.

En campo magnético queda de la forma siguiente,

$$\mathbf{B}_4 = -\frac{\mu_o}{24} \frac{I}{a/2} \mathbf{u}_x = -2 \frac{\mu_o}{24} \frac{I}{a} \mathbf{u}_x$$

5) Tramo recto que forma un ángulo $\pi/2$ con el eje Y

Aquí utilizamos la ley de Biot y Savart como se hace en el ejemplo 6.1, página 220 del libro de Física para informática (V. López y M. M. Montoya). En nuestro caso $R = a/2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\pi/2$ y, dado el sentido de la corriente en O $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_x$.

$$\mathbf{B}_5 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{a/2} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_5 = -\frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I}{a} \mathbf{u}_x$$

El campo total en el origen es la suma de los obtenidos en cada tramo.

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_5$$

$$\mathbf{B}_T = \frac{\mu_o I}{24 a} \mathbf{u}_x - 2 \frac{\mu_o I}{24 a} \mathbf{u}_x - \frac{\mu_o I}{2\pi a} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_T = -\mu_o \frac{I}{a} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2\pi} \right) \mathbf{u}_x$$

PROBLEMA 2.1.3

La figura P2.1.3 muestra un circuito alimentado por un generador de corriente alterna $V_o = 10 \text{ V}$. Calcular la diferencia de potencial entre los bornes AB.

$\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$. $R_1 = R_2 = 10 \Omega$. $C = 10 \mu\text{F} = 10^{-5} \text{ F}$. $L = 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H}$.

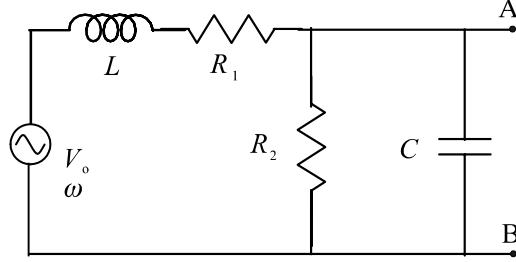


Figura P2.1.3

Solución

Comenzamos por calcular las reactancias.

$$X_L = \omega L = 10^4 \times 10^{-3} = 10$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^4 \times 10^{-5}} = -10$$

La rama $L - R_1$ tiene una impedancia,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_L = 10 + j10 = 10(1 + j)$$

Por otro lado R_2 y X_C están en paralelo,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_C} \rightarrow \mathbf{Z}_2 = \frac{R_2(jX_C)}{R_2 + jX_C}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{10(-j10)}{10 - j10} = \frac{-j10}{1 - j} = \frac{-j10(1 + j)}{2} = 5(1 - j)$$

El generador se aplica a la suma en serie de las dos impedancias calculadas.

$$\mathbf{Z}_T = 10(1 + j) + 5(1 - j) = 15 + j5$$

Para obtener la tensión \mathbf{V}_{AB} debemos calcular la corriente que suministra el generador.

$$\mathbf{I} = \frac{V_o}{\mathbf{Z}_T} = \frac{10}{15 + j5}$$

La tensión \mathbf{V}_{AB} se obtiene multiplicando la corriente \mathbf{I} por \mathbf{Z}_2

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I} \mathbf{Z}_2 = \frac{10}{15 + j5} 5(1 - j) = 10 \frac{1 - j}{3 + j}$$

$$\mathbf{V}_{AB} = 2 - j4$$

$$V_{AB} = 2\sqrt{5} \quad ; \quad \tan \theta = -\frac{4}{2} = -2$$

FÍSICA (Informática de Gestión)
Septiembre de 2005
Soluciones (Reserva)

PROBLEMA 2.2.1

Dado el sistema de cargas puntuales indicado en la figura P2.2.1:

1) Calcular el campo y potencial en el origen de coordenadas O. 2) Obtener el flujo total a través de la superficie esférica S de radio R ($R > d$) y centro en O.

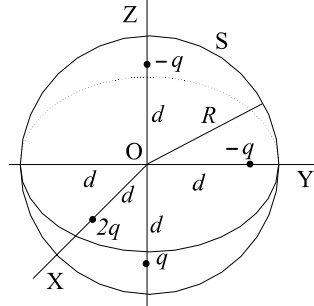


Figura P2.2.1

Solución

1) *Campo y potencial en O*

Calculamos el campo y potencial eléctrico mediante las siguientes relaciones,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} ; \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

$$\mathbf{r} = 0 ; \mathbf{r}_1 = d\mathbf{u}_y ; \mathbf{r}_2 = d\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}_3 = d\mathbf{u}_x ; \mathbf{r}_4 = -d\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = -d\mathbf{u}_y ; \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = -d\mathbf{u}_z ; \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = -d\mathbf{u}_x ; \mathbf{r} - \mathbf{r}_4 = d\mathbf{u}_z$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = d$$

$$q_1 = -q ; q_2 = -q ; q_3 = 2q ; q_4 = q$$

Campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{-q}{d^3} (-d\mathbf{u}_y) + \frac{-q}{d^3} (-d\mathbf{u}_z) + \frac{2q}{d^3} (-d\mathbf{u}_x) + \frac{q}{d^3} (d\mathbf{u}_z) \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{d^2} (-2\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z)$$

Potencial eléctrico

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{d} \left(\frac{-q}{d} + \frac{-q}{d} + \frac{2q}{d} + \frac{q}{d} \right)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{d}$$

2) *Flujo Total a través de la superficie esférica S*

Aplicamos el teorema de Gauss. El flujo a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas que hay en su interior.

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_1^4 q_i$$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_o}$$

PROBLEMA 2.2.2

Dado el circuito que muestra la figura P2.2.2, calcular el circuito equivalente Thévenin visto desde los puntos A B.

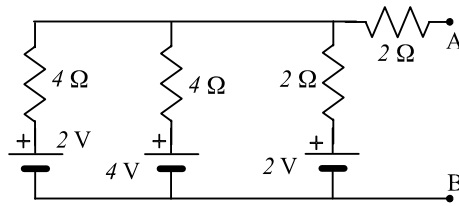


Figura P2.2.2

Solución

En primer lugar debemos establecer las ecuaciones de malla para obtener las corrientes en las distintas ramas. Suponemos la corriente de malla en sentido horario.

$$\begin{aligned} 2 - 4 &= 8I_1 - 4I_2 \quad \rightarrow \quad -2 = 8I_1 - 4I_2 \\ 4 - 2 &= -4I_1 + 6I_2 \quad \rightarrow \quad 2 = -4I_1 + 6I_2 \end{aligned}$$

La solución mediante el método de Cramer es,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{32} = -\frac{1}{8}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Calculamos la corriente en la rama común en el sentido de I_2 , que es la positiva en nuestro cálculo.

$$I_c = I_2 - I_1 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

Generador equivalente

El potencial entre los bornes AB del circuito equivalente de Thévenin, como no pasa corriente por la resistencia de 2Ω unida al punto A, será el potencial común a las tres ramas con pila.

Calculamos el potencial utilizando la rama central, rama común. Desde abajo hacia arriba tenemos una subida de tensión en la pila de 4 voltios y una caída de tensión $4I_c$ en la resistencia de 4Ω .

$$V_{AB} = 4 - 4I_c = 4 - 4 \times \frac{3}{8} = 2,5 \text{ V}$$

Si elegimos la primera rama para calcular el potencial tendremos,

$$V_{AB} = 2 - 4I_1 = 2 - 4 \left(-\frac{1}{8} \right) = 2,5 \text{ V}$$

Si elegimos la tercera rama para calcular el potencial tendremos que la caída de tensión entre A y B es,

$$-V_{AB} = -2I_2 - 2 = -\frac{1}{2} - 2 = -2,5 \rightarrow V_{AB} = 2,5 \text{ V}$$

Luego el generador equivalente del circuito Thévenin es,

$$V_o = 2,5 \text{ V}$$

Resistencia equivalente

Cortocircuitamos todas las pilas y calculamos la resistencia que se "ve" desde AB.

Primero calculamos la resistencia equivalente de las tres ramas en paralelo,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow R = 1 \Omega$$

$$R_o = R + 2 = 3 \Omega$$

Por tanto el circuito equivalente se compone de una pila en serie con una resistencia,

$$V_o = 3,5 \text{ V} ; R_o = 2 \Omega$$

PROBLEMA 2.2.3

Las curvas representadas en la figura P2.2.3 corresponden a un diodo de silicio a dos temperaturas distintas, en el que la relación corriente tensión es de la forma, $I_D = I_S (\exp(20V_D) - 1)$.

Suponiendo que en el silicio la corriente I_S se duplica al aumentar su temperatura 10°C , observando las gráficas de la figura P2.2.3 indicar,

1) Cual de las gráficas (1) y (2) corresponde a la temperatura más baja. 2) Calcular de forma aproximada la diferencia entre las temperaturas del diodo cuando se representó una y otra gráfica.

NOTA: Para una mejor visión de las gráficas se hace una traslación de coordenadas de manera que V_D se inicia en 0,6 voltios.

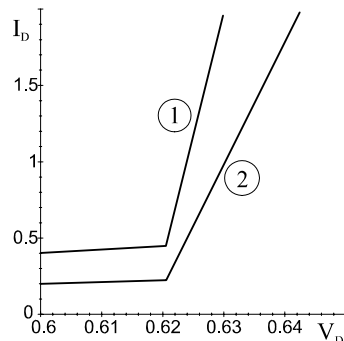


Figura P2.2.3

Solución

1)

Si al aumentar la temperatura aumenta I_S la gráfica (2) corresponde a la temperatura más baja.

2)

Teniendo en cuenta la relación para la corriente, para un determinado valor de V_D tendremos que,

$$\frac{I_D(1)}{I_D(2)} = \frac{I_S(1)(\exp(20V_D) - 1)}{I_S(2)(\exp(20V_D) - 1)} = \frac{I_S(1)}{I_S(2)}$$

Si elegimos el punto donde $V_D = 0,6$, vemos que sobre el eje de I_D , de forma aproximada, $I_D(1) \simeq 0,4$ y $I_D(2) \simeq 0,2$

Llevando estos valores a la relación anterior,

$$\frac{I_S(1)}{I_S(2)} \simeq \frac{0,4}{0,2} \simeq 2$$

Es decir,

$$I_S(1) \simeq 2I_S(2)$$

En el enunciado decimos que I_S se duplica cuando la temperatura aumenta 10°C . De la ecuación anterior se deduce que la gráfica (1) se obtuvo con una temperatura 10°C superior al la gráfica (2).